

Organigramme de la Spécialité  
Métiers de l'Enseignement et de la Formation  
en Mathématiques  
du Master Mention Mathématiques

**Universités de la Région Nord-Pas-de-Calais**

Artois — Lille 1 — Littoral Côte d'Opale – Valenciennes et Hainaut-Cambrésis

3 mai 2010

## PRÉAMBULE

Cette annexe contient la liste des unités, leur programme, leur agencement et, pour certaines d'entre elles, une description de leur mode d'évaluation. Lorsque ce point n'est pas abordé, il s'agit d'une évaluation classique avec examens écrits, en privilégiant le contrôle continu lorsque c'est possible.

Les unités de ce Master sont répertoriées suivant une nomenclature qui rappelle leur caractéristique principale.

- *Les unités disciplinaires obligatoires sont codées de D1 à D6.* Il s'agit d'enseignements dont le contenu mathématique est du niveau d'un Master 1 de Mathématiques. Dans le choix du programme, il a été, le plus souvent possible, tenu compte de la spécificité de cette Spécialité, à savoir une formation au métier d'enseignant en Mathématiques. Nous avons en général opté pour un approfondissement non trivial de notions mathématiques déjà rencontrées, en opposition à l'introduction de nouvelles théories qui resteraient sans retombées concrètes. Une part importante est consacrée à l'expression orale et 20% du volume horaire de ces unités disciplinaires sont consacrés à un exposé suivi de discussions.
- *Les unités professionnalisantes obligatoires sont codées de PR1 à PR7.* Elles se présentent sous forme de stages accompagnés d'un enseignement de culture professionnelle, d'initiation aux nouvelles technologies et de Leçons de Mathématiques. Ces dernières sont au cœur du futur métier des étudiants : préparer un cours de Mathématiques à un niveau donné, l'exposer, savoir utiliser et critiquer un manuel.
- *Les unités pluridisciplinaires sont codées de PL1 à PL5.* Elles regroupent une unité d'Épistémologie et Histoire des Mathématiques et un enseignement de Langues.
- *Les unités de réorientation sont RO1, RO2 et RO3.* Elles regroupent les unités permettant aux étudiants non-admissibles d'adapter leur projet professionnel.
- *Les unités optionnelles sont codées de O1 à O7.* Elles sont assez équitablement réparties entre disciplinaires et professionnalisantes.

L'ensemble des unités obligatoires représente 104 ECTS sur un total de 120. Sur ces 104 ECTS,

- 50 sont professionnalisantes, soit 48%,
- 10 sont pluridisciplinaires, soit 10%,
- 44 sont disciplinaires, soit 42%.

*La première année de ce Master* comporte un tronc commun de 8 unités (pour 44 ECTS) et des options à choisir parmi une liste de 7 unités (pour 16 ECTS). Une souplesse de fonctionnement est prévue : l'étudiant pourra utiliser les unités des autres spécialités de la Mention pour composer son parcours d'unités disciplinaires ainsi que des unités d'autres Masters d'Enseignement pour composer son parcours professionnel. L'ensemble doit être soumis à l'accord préalable du responsable local de la Spécialité.

*La deuxième année de ce Master* est, pour l'essentiel, consacrée à la préparation des épreuves écrites et orales du concours de CAPES, ainsi qu'aux stages et à leur accompagnement en culture professionnelle. Avec l'initiation aux technologies et l'apprentissage d'une Langue, le programme est complet. Pour le deuxième semestre de ce M2, nous distinguons trois cas :

- les étudiants admissibles qui se consacrent à la préparation des épreuves d'admission, avec en parallèle des stages en établissement scolaire et un enseignement de langues.

- les étudiants non-admissibles qui maintiennent leur projet professionnel d'enseignement. Leur cursus est similaire à celui des étudiants admissibles. Leur stage se déroulera en milieu éducatif.
- les étudiants non-admissibles qui désirent changer de projet professionnel. Ils suivent un enseignement théorique, issu d'un des Masters professionnels de l'université, préparant à un stage en entreprise. Afin de conforter l'ouverture à l'international, l'unité d'anglais est renforcée et l'enseignement d'une autre langue est proposé (initiation ou perfectionnement).

# Table des matières

<b>I Organigramme des deux années</b>	<b>6</b>
<b>II Modules obligatoires</b>	<b>11</b>
<b>1 Modules professionnalisants</b>	<b>12</b>
1.1 Stages et Culture Professionnelle . . . . .	12
1.1.1 Semestre 1 M1 . . . . .	12
1.1.2 Semestre 2 M1 . . . . .	13
1.1.3 Semestre 4 M2 . . . . .	14
1.2 Leçons de Mathématiques et Initiation à la Recherche . . . . .	15
1.3 Formation à l’usage professionnelle des nouvelles technologies . . . . .	16
1.4 Préparation à la deuxième épreuve orale . . . . .	17
1.4.1 Préparation à la première partie de l’épreuve. . . . .	17
1.4.2 Systèmes éducatifs et préparation à la deuxième partie de l’épreuve. . . . .	18
1.5 Modules pour étudiants non-admissibles . . . . .	18
1.5.1 Module théorique pour les étudiants non-admissibles en réorientation . . . . .	18
1.5.2 Stages en entreprise et Mémoire professionnel . . . . .	18
1.5.3 Stages en milieu scolaire . . . . .	18
<b>2 Modules disciplinaires</b>	<b>19</b>
2.1 Probabilités et Statistique . . . . .	19
2.2 Algèbre . . . . .	20
2.3 Géométrie . . . . .	20
2.4 Analyse 1 . . . . .	21
2.5 Préparation à l’écrit . . . . .	22
2.6 Préparation à la première épreuve orale . . . . .	23
<b>3 Modules pluridisciplinaires</b>	<b>24</b>
3.1 Épistémologie et Histoire de la discipline . . . . .	24
3.2 Langues . . . . .	25

<b>III Options</b>	<b>26</b>
<b>4 Modules professionnalisants optionnels</b>	<b>27</b>
4.1 Les Mathématiques, discipline scolaire et Culture professionnelle . . . . .	27
4.2 Histoire de l'Enseignement des Mathématiques . . . . .	28
4.3 Didactique des Mathématiques liée aux contenus enseignés . . . . .	28
4.4 Séminaires de Recherche . . . . .	29
<b>5 Modules disciplinaires optionnels</b>	<b>30</b>
5.1 Arithmétique et Théorie des Nombres 1 . . . . .	30
5.2 Arithmétique et Théorie des Nombres 2 . . . . .	30
5.3 Analyse 2 . . . . .	31
5.4 Analyse numérique et Programmation . . . . .	32

## **Première partie**

# **Organigramme des deux années**

MODULES OBLIGATOIRES			
UE	Code	Heures	ECTS
Algèbre	D1	60	6
Analyse 1	D2	60	6
Probabilités-Statistique	D3	60	6
Stages et Culture professionnelle	PR1	36	6
Anglais	PL1	24	2
MODULES OPTIONNELS <i>Choisir 4 ECTS parmi les modules suivants</i>			
UE	Code	Heures	ECTS
Analyse 2	O1	40	4
Les Mathématiques, discipline scolaire et Culture Professionnelle	O2	60	4

– M1 – Premier Semestre –

MODULES OBLIGATOIRES			
UE	Code	Heures	ECTS
Stages et Culture Professionnelle	PR2	36	6
Leçons de Mathématiques et Initiation à la Recherche	PR3	60	6
Épistémologie et Histoire des Mathématiques	PL2	60	6
MODULES OPTIONNELS <i>Choisir 12 ECTS parmi les modules suivants</i>			
UE	Code	Heures	ECTS
Arithmétique	O3	60	6
Analyse numérique et Programmation	O4	60	6
Histoire de l'Enseignement des Mathématiques	O5	30	3
Didactique des Mathématiques liée aux contenus enseignés	O6	60	6
Séminaires de Recherche	O7	30	3

– M1 – Deuxième Semestre –

MODULES OBLIGATOIRES			
UE	Code	Heures	ECTS
Mathématiques pour l'enseignement	D4	108	12
Leçons de Mathématiques et Initiation à la Recherche	PR4	40	6
Géométrie	D5	60	6
Formation à l'usage professionnel des nouvelles technologies	PR5	48	6

– M2 – Premier Semestre –

MODULES OBLIGATOIRES			
UE	Code	Heures	ECTS
Préparation à la première épreuve orale	D6	84	8
Stages et Culture Professionnelle	PR6	48	12
Préparation à la deuxième épreuve orale	PR7	84	8
Anglais	PL3	24	2

– M2 – Deuxième Semestre – Étudiants admissibles –

MODULES OBLIGATOIRES			
UE	Code	Heures	ECTS
Préparation théorique aux stages en Entreprise	RO1	48	6
Stages en Entreprise et Mémoire professionnel	RO2	48	14
Anglais	PL4	54	6
Autre Langue Vivante	PL5	36	4

– M2 – Deuxième Semestre – (Non-admissibles en réorientation) –

MODULES OBLIGATOIRES			
UE	Code	Heures	ECTS
Préparation à la première épreuve orale	D6	84	8
Stages en Entreprise ou en milieu scolaire	RO3	48	12
Préparation à la deuxième épreuve orale	PR7	84	8
Anglais	PL3	24	2

– M2 – Deuxième Semestre – (Non-admissibles gardant un projet d'enseignement) –

**Deuxième partie**

**Modules obligatoires**

# Chapitre 1

## Modules professionnalisants

### 1.1 Stages et Culture Professionnelle

*Ces stages sont déclinés en 3 modules représentant :*

- 6 ECTS au premier semestre du M1, avec 36 heures de présence en milieu universitaire et deux stages d'observation, le premier massé d'une semaine après les vacances de la Toussaint et le deuxième filé. L'un aura lieu en collège l'autre en lycée.
- 6 ECTS au deuxième semestre du M1, avec 36 heures de présence en milieu universitaire et deux stages filés d'une semaine chacun en lycée ou collège, dont l'un dans un établissement RAR (réseau ambition réussite).
- 12 ECTS au deuxième semestre du M2, avec 48 heures de présence en milieu universitaire et un stage en responsabilité de six semaines en lycée et/ou collège.

Une progression est engagée au niveau des stages : quatre stages d'observation et de pratique accompagnée au M1 et un stage en responsabilité de six semaines au deuxième semestre du M2.

Un stage doit être l'occasion non seulement d'observer la vie d'une classe, mais aussi celle d'un établissement dans son ensemble (administration, médecin scolaire, infirmerie, assistante sociale). Les deux types de stages : filés et bloqués permettent d'apercevoir deux réalités pédagogiques différentes et complémentaires.

Une observation se construit et une pratique accompagnée s'apprend. Les deux se préparent. C'est pourquoi il y a nécessité d'une analyse *a priori* (place de la séance dans la progression, objectif et nature de la séance) et d'une critique *a posteriori*. Il faut que les stages se terminent par des rapports et un exposé sur le bilan du stage, les enseignements que l'on en tire.

L'élaboration d'un mémoire professionnel contribue à la réflexion didactique et pédagogique. Ce travail conduit l'étudiant à s'engager dans un processus de recherche personnel et créatif. D'autre part le mémoire peut être aussi l'occasion de pratiquer un thème mathématique enseigné au collège ou au lycée et d'en expliciter les mathématiques sous jacentes.

#### 1.1.1 Semestre 1 M1

*Stages d'observation le premier massé d'une semaine et le deuxième filé d'une semaine. L'un en collège l'autre en lycée.*

##### **Analyse des stages**

- Préparation de l'observation : analyse de documents pédagogiques associés au stage et conception d'une grille d'observation.
- Analyse des séances observées : organisation des contenus, gestion de la classe, productions d'élèves.

**Initiation aux méthodes d'analyse didactique** (a priori et a posteriori) de situations d'apprentissage. Mise en place d'ateliers d'analyse de pratiques, analyses de vidéos. Étude de stratégies d'enseignement. Étude de conceptions des élèves. Étude de diverses formes d'évaluation. Outils d'élaboration et d'analyse de séances.

Suivant le parcours des étudiants, le cours se poursuivra par un ou plusieurs des thèmes suivants.

#### **Connaissance des programmes du secondaire et de leur évolution.**

- Étude et analyse approfondie des programmes et des documents d'accompagnement actuels (secondaire et classes de techniciens supérieurs) : cohérence, contexte mathématique.
- Étude de la continuité des apprentissages dans un domaine donné (par exemple, de l'arithmétique à l'algèbre).
- Étude des différentes organisations possibles des savoirs enseignés à travers des comparaisons des programmes et de manuels.
- Élaboration de progressions.

#### **Connaissance du système éducatif.**

- *Valeurs et finalités de l'école.*

Construction du système éducatif français : approche socio historique — Etat des lieux. Les principes du service public d'éducation : Les valeurs et les finalités dans la classe et l'établissement. Lois, règles et règlements — Droits et devoirs dans la communauté éducative — Code de l'éducation — Règlements intérieurs des EPLE : tensions et dilemmes. — La diversité et la norme en contexte scolaire.

- *Théories critiques de la forme scolaire.*

Inégalités. Poids des disciplines. Education à la citoyenneté. Les modes de travail en classe : prégnance et résistance.

- *Les métiers d'enseignant aujourd'hui.*

Évolutions et transformation du travail (travail en équipe intra disciplinaire, interdisciplinaire et membres de l'EPLE, partenariat, relation avec les familles) . Finalités, compétences et identités professionnelles : les diverses conceptions du métier d'enseignant (instruire, enseigner, former), les référentiels de compétences pour enseigner, objet et enjeu sociaux et institutionnels (efficacité, qualité), le développement professionnel et le travail enseignant en situation.

- *Enseigner et Apprendre à l'école : Le métier d'élève.*

Le rapport au savoir, l'échec scolaire, la réussite, les conditions d'appropriation du savoir, le rapport à l'erreur. Les activités, les tâches scolaires des élèves en classe (l'écoute, la participation, la prise de notes, s'exercer.). Les règles, les exigences et les routines face au travail scolaire. Le travail hors l'école pour l'école (les leçons et les devoirs). Les stratégies des élèves.

### **1.1.2 Semestre 2 M1**

*Deux stages filés en Collège ou Lycée, d'une semaine chacun, dont l'un en établissement RAR.*

### **Analyse des stages**

- Conception d'une suite de séances : prise en compte de la progression des contenus, de l'organisation de la classe et de la diversité des élèves.
- Analyse de séances : organisation de l'activité mathématique dans la classe, organisation et suivi du travail personnel des élèves en dehors de la classe.
- Début de recueil de données en vue d'alimenter le mémoire du semestre 4.
- Mise en place d'ateliers d'analyse de pratiques.

### **Questions de pédagogie.**

- La construction de l'autorité et la confiance :
  - gestion éducative de la classe.
  - régulation du cadre de travail.
  - prévention et gestion des perturbations.
  - les sanctions et punitions.
  - les règles dans la classe et l'établissement.
- La communication dans la classe.
- La motivation en contexte scolaire.
  - Les diverses causes affectives, sociales, institutionnelles.
  - Les pratiques pédagogiques favorisant la motivation.
- Les usages de l'évaluation.
  - Types et fonctions de l'évaluation.

### **Connaissance du système éducatif.**

*Politiques éducatives, débats et questions vives.*

- L'égalité des chances (le contexte d'enseignement dont REP, RAR, le socle commun de compétences, les discriminations).
- La laïcité : Les principes fondamentaux et leur implication dans les établissements scolaires du second degré.
- La transmission de la culture, l'émancipation.
- Les violences scolaires :
  - Histoire des violences scolaires.
  - Violence à l'école et sphère publique.
  - Politiques scolaires contre la violence à l'école.
  - Débat.

### **1.1.3 Semestre 4 M2**

*Stages en responsabilité : six semaines en lycée/collège.*

- Recueil et analyse des données.
- Séminaires d'aide à la préparation du mémoire professionnel.
- Rédaction puis soutenance du mémoire professionnel

### **La diversité et la norme en contexte scolaire**

- *L'adolescence.*
  - Approches psychologique, physiologique, affective, cognitive et sociale et les répercussions sur les processus d'apprentissage.

- L'identité sociale des adolescents.
- Les risques à l'adolescence sur les plans physique, psychique et social.
- *Le décrochage scolaire* : Les processus d'abandon scolaire du point de vue des apprentissages, du point de vue de l'environnement.
- *Les élèves à besoins éducatifs particuliers* : Sens, enjeux et modalités de l'accueil et de l'intégration d'élèves à besoins éducatifs particuliers en classe "ordinaire" (élèves en situation de handicap ou en difficulté scolaire durable).
- *La question du genre*.
  - Attitudes comportementales et cognitives des filles et des garçons.
  - Notions de mixité, parité.
  - Stéréotypes.
- *La motivation en contexte scolaire*.
  - Les diverses causes affectives, sociales, institutionnelles.
  - Les pratiques pédagogiques favorisant la motivation.
- *Les usages de l'évaluation*.
  - Types et fonctions de l'évaluation.

## 1.2 Leçons de Mathématiques et Initiation à la Recherche

*Réparties en deux modules, ces leçons représentent*

- 6 ECTS pour 60 heures de présence au deuxième semestre du M1,
- 6 ECTS pour 40 heures de présence au premier semestre du M2.

Ces leçons visent à atteindre plusieurs buts.

1. Entraîner les étudiants à l'expression orale en leur donnant l'occasion de faire des cours de mathématiques de différents niveaux, allant du collège jusqu'à la licence.
2. Permettre aux étudiants de revisiter une partie du programme du secondaire et de L1-L3 avec un nouveau regard, celui du professeur, qui doit expliquer, plutôt que celui de l'étudiant, qui doit (seulement) apprendre. Ceci leur fournira une excellente révision de la matière, et leur permettra de combler d'éventuelles lacunes.
3. Apprendre aux étudiants à jeter un regard critique sur les manuels scolaires et à réfléchir sur les programmes, leur cohérence et leur architecture.
4. Inciter les étudiants à voir l'unité des mathématiques, en les invitant à mobiliser des connaissances de ses différentes sous-disciplines.
5. Illustrer le rôle des mathématiques comme outil de pensée dans les sciences.
6. Réfléchir à l'évolution historique des idées en mathématiques.

**Organisation d'une unité.** Deux séances de 2h30 par semaine pendant douze ou treize semaines, en groupes d'au plus 30 étudiants. Pendant chaque séance, un binôme présente une leçon d'environ 60 minutes. Chaque exposé s'accompagne d'un texte de quelques pages, contenant un résumé, des références bibliographiques et des exercices sur le sujet traité. Les 90 minutes restantes sont consacrées à une critique de la leçon proposée par le groupe et l'enseignant, à la résolution des exercices proposés et à d'éventuels compléments proposés par l'enseignant.

**Évaluation.** L'objectif est d'évaluer la qualité des exposés, mais aussi ce que chaque étudiant a retiré des exposés des autres. La formule retenue comporte :

- une note pour les exposés, prenant aussi en compte la version écrite ; cette note compte pour 50% dans la note globale,
- une note pour une épreuve orale en fin de module : l'étudiant travaille sur un sujet tiré au sort (en excluant celui de son exposé), avec documents. Il est ensuite interrogé oralement sur ce qu'il a écrit et répond à des questions connexes (durée approximative, 1/4 heure) ; cette note compte pour 50% dans la note globale.

**Sujets des leçons.** Les leçons sont de deux types et l'utilisation intelligente d'une calculatrice graphique sera exigée là où c'est possible.

(A) Une partie des leçons sera inspirée par les actuelles leçons de type 1 pour le concours de CAPES. On opérera des regroupements parmi les plus intéressantes et les plus riches. Elles permettront notamment la révision des programmes. Voici une liste non-exhaustive de thèmes, chacun pouvant être la source de plusieurs leçons.

— Les nombres : constructions et axiomatiques des entiers, des rationnels, des réels et des complexes. — Cardinalité et dénombrement — Arithmétique dans  $Z$  — Le plan complexe — Géométrie du plan et de l'espace — Cercles et triangles — Groupes des translations-homothéties, des isométries. — Les coniques — Suites — Fonctions continues sur un intervalle — Fonctions dérivables — Accroissements finis et Taylor — Intégration — Fonctions usuelles : construction, calcul — Équations différentielles — Probabilités — Statistique.

(B) Une partie des leçons traitera de sujets un peu plus avancés, de préférence transversaux, et certaines seront orientées vers les applications et/ou l'histoire des mathématiques. Voici quelques exemples, mais la liste doit être complétée et elle pourra s'allonger et différer au fil des années.

— Théorèmes du point fixe (suites itérées, méthode de Newton, approximations, équations différentielles, inversion locale.) — Optimisation (recherche de minima, maxima, principe variationnel, moindres carrés, applications en tout genre...) — Systèmes dynamiques (discrets et continus, translations d'un tore, billard carré,...) — Déterminants et applications — Jeux et énigmes — Le nombre pi (géométrie, analyse, probabilités...) — Qu'est-ce qu'une courbe ? — La géométrie dans le secondaire : quelles définitions, quels axiomes (explicites ou non) — Les invariants en géométrie. — Équations de sous-espaces (vectoriels et affines) : interprétation en termes de systèmes linéaires, et en termes de dualité — Analyse vectorielle : gradient, rotationnel, divergence, Green-Riemann... — Convexité — L'introduction des nombres complexes pendant la Renaissance — Les précurseurs du calcul infinitésimal : Archimède, Cavalieri, Fermat, etc. — Les fondateurs du calcul infinitésimal : Leibniz et Newton — Galois et la théorie des groupes — Histoire du concept de fonction — L'intégrale de Cauchy et l'intégrale de Riemann : comparaison et histoire — Problèmes de continuité (ponctuelle et uniforme) dans l'analyse du 19<sup>ème</sup> siècle — On pourra également tirer plusieurs leçons du récent livre "Mathématiques et Technologie" par Christiane Rousseau, Yvan Saint-Aubin, et H. Antaya

### 1.3 Formation à l'usage professionnelle des nouvelles technologies

*Ce module représente 6 ECTS au premier semestre du M2 avec 48 heures de présence en milieu universitaire.*

**Formation à l'usage professionnel des TIC (C2i2e)** L'objectif est l'acquisition

- de compétences liées à l'exercice du métier (maîtrise de l'environnement numérique professionnel, des logiciels couramment utilisés en classe de mathématiques : un logiciel de géométrie dynamique, geoplan, geospace ou geogebra et un tableur
- de compétences nécessaires à l'intégration des TICE dans la pratique professionnelle (travail en réseau, conception et préparation de contenus d'enseignement et de situations d'apprentissage).
- Construction d'une ou plusieurs activités mathématiques afin de valider des compétences du B2i.
- Découverte et mise en application de l'épreuve pratique en TS.

### **Introduction au Latex.**

### **Formation à l'utilisation des calculatrices dans l'enseignement secondaire.**

## **1.4 Préparation à la deuxième épreuve orale**

*Ce module représente 8 ECTS au deuxième semestre du M2, avec des poids respectifs de 3/4 pour la première partie et d'1/4 pour la deuxième. Pour cette préparation, nous nous référons sur la description officielle de l'épreuve.*

### **1.4.1 Préparation à la première partie de l'épreuve.**

L'épreuve s'appuie sur un dossier fourni par le Jury, portant sur un thème des programmes de mathématiques du collège, du lycée ou des sections de techniciens supérieurs. Ce thème est illustré par l'énoncé d'un exercice, pouvant être complété par des extraits de manuels, des productions d'élèves ou des passages des programmes officiels. Ce dossier comprend des questions permettant d'apprécier la réflexion pédagogique du candidat. Ces questions portent sur l'énoncé de l'exercice et sa résolution ou d'autres aspects pédagogiques liés au contenu du dossier. Dans un premier temps (20 mn), le candidat expose ses réponses aux questions posées dans le dossier et propose, en motivant ses choix, plusieurs exercices s'inscrivant dans le thème du dossier. Cette première partie se termine par un entretien avec le Jury, portant sur l'exposé du candidat et sur les exercices qu'il a proposés.

Organisation de l'unité : pendant chaque demi-séance, un étudiant exposera d'abord dans les mêmes conditions que ci-dessus. La suite de la séance sera consacrée à un entretien avec l'enseignant et le groupe concernant les faiblesses et les points forts des réponses proposées, la pertinence des exercices proposés par l'étudiant, à la résolution de certains de ces exercices et à d'éventuels compléments proposés par l'enseignant.

Évaluation : L'objectif est d'évaluer la qualité du travail fourni par l'étudiant en cours de module mais aussi les compétences qu'il a acquises.

Formule employée : — une note pour les exposés, prenant aussi en compte la version écrite. Cette note compte pour 50%. — une note pour une épreuve orale blanche en fin de module, cette note compte pour 50%.

Thèmes : Algèbre. Arithmétique. Géométrie. Nombres complexes. Dénombrement. Probabilités statistiques. Analyse.

## **1.4.2 Systèmes éducatifs et préparation à la deuxième partie de l'épreuve.**

Cette épreuve prend appui sur un document inclus dans le dossier remis au début de la deuxième épreuve par le Jury et portant sur les thématiques regroupées autour des connaissances, des capacités et des attitudes définies pour la compétence "Agir en fonctionnaire de l'État et de façon éthique et responsable." Elle consiste en une présentation (10 mn) suivi d'un entretien avec le Jury (10 mn). L'exposé permet au candidat de présenter une analyse du dossier et de formuler un avis. Le jury vérifiera ensuite les connaissances du candidat relatives aux valeurs et aux exigences du service public, au système éducatif et à ses institutions et, de manière plus générale, sa capacité à exercer le métier de professeur de collège et de lycée.

Thèmes possibles : — "Les compétences professionnelles des maîtres" de l'annexe de l'arrêté du 19 décembre 2006. — Les valeurs et exigences du service public (les principes fondamentaux, perspective historique des principales évolutions, l'éthique du service public, la place du professeur). — L'ouverture au monde. — L'établissement (les équipes, leurs fonctions, leurs relations, les organes et leurs compétences, les ressources pédagogiques, la communauté éducative, les partenariats entre l'établissement et son environnement économique, social et culturel). — Les élèves (la diversité, les attentes, les droits et obligations des élèves).

## **1.5 Modules pour étudiants non-admissibles**

### **1.5.1 Module théorique pour les étudiants non-admissibles en réorientation**

*Ce module représente 6 ECTS au deuxième semestre du M2 avec 48 heures de présence en milieu universitaire.*

Cet enseignement est extrait d'un des Masters professionnels des universités participantes. Par exemple, un stage en milieu bancaire pourrait être précédé d'une unité de mathématiques financières.

### **1.5.2 Stages en entreprise et Mémoire professionnel**

*Ce module représente 14 ECTS au deuxième semestre du M2 avec 48 heures de présence en milieu universitaire.*

Il s'agit d'un stage en entreprise de 6 semaines qui conduit l'étudiant à s'engager dans un processus de recherche personnel et créatif, adapté à son projet d'insertion professionnelle. Le stage est préparé et suivi en milieu universitaire. Le mémoire écrit doit comporter un retour d'expérience du stage, la rédaction d'un cas inspiré d'une situation vécue et la présence d'une réflexion personnelle. Le mémoire fait également l'objet d'une soutenance orale. Des séminaires d'aide à la préparation du mémoire professionnel seront organisés.

### **1.5.3 Stages en milieu scolaire**

*Ce module représente 12 ECTS au deuxième semestre du M2 avec 48 heures de présence en milieu universitaire.*

Ce module est destiné aux étudiants non-admissibles qui maintiennent leur projet professionnel d'enseignement. Le stage se déroule en milieu éducatif. L'organisation est similaire à celle de l'unité PR6.

## Chapitre 2

# Modules disciplinaires

Les programmes ci-dessous peuvent être adaptés aux acquis des étudiants de chaque université participante, sous réserve de l'accord du responsable local de la spécialité.

### 2.1 Probabilités et Statistique

*Ce module représente 6 ECTS au premier semestre du M1.*

1. Rappels et compléments sur les variables et vecteurs aléatoires et les théorèmes limites. Vecteurs aléatoires gaussiens. Théorème limite central avec autonormalisation, théorème limite central vectoriel (cas i.i.d.) et approximation gaussienne de la loi multinomiale, théorème de Lindeberg-Lévy et applications.
2. Estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance de paramètres d'une loi. Méthode du maximum de vraisemblance. (Les développements théoriques autour du maximum de vraisemblance sont exclus.)
3. Exemples de méthodes de simulation de vecteurs aléatoires (loi uniforme sur des domaines simples du plan, vecteurs gaussiens, ...). Méthode de Monte-Carlo.  
La simulation de vecteurs aléatoires doit être l'occasion de mettre en oeuvre quelques notions d'algèbre (vecteurs gaussiens et formes quadratiques), ou de géométrie (barycentre, effet d'une application affine sur les aires et les volumes pour la simulation de lois uniformes : triangle, parallélogramme, ellipse, ...). La méthode de Monte-Carlo pour le calcul des intégrales fournit une belle illustration des intervalles de confiance et des vitesses de convergence dans le TLC. Elle devra évidemment être vue en liaison avec l'unité d'analyse numérique.
4. Tests d'hypothèse. Il s'agit de présenter la problématique et le vocabulaire basique (erreurs de 1ère et 2ème espèce, puissance, ...) à partir d'exemples et des simulations.
5. Exemples de tests sur les paramètres d'une loi (binomiale, gaussienne, ...), avec des illustrations informatiques.
6. Test de comparaison des moyennes de deux échantillons, avec des exemples concrets (efficacité d'un nouveau médicament).

Sur les douze séances de T.D., trois au moins pourraient se faire sous forme de T.P. sur machine. Le programme s'y prête tout à fait à partir de la cinquième semaine, notamment les intervalles de confiance, la méthode de Monte-Carlo, les exemples de tests.

### **Notions d'intérêt pour un enseignant dans le secondaire**

- Loi multinomiale et intervalle de confiance permettent une lecture critique des sondages (statistique et citoyenneté).
- Intervalles de confiance et précision d'une mesure (lien avec les sciences expérimentales).
- Caractère universel des lois gaussiennes.
- Regard critique sur les simulations numériques (vitesse de convergence).
- Tester une hypothèse simple en présence de *données* réelles ou simulées. Prise d'une décision pratique avec risque d'erreur contrôlé.

## **2.2 Algèbre**

*Ce module représente 6 ECTS au premier semestre du M1.*

- Classes de conjugaison et formule des classes du groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$ . Simplicité du groupe alterné  $\mathcal{A}_n$  pour  $n \geq 5$ .
- Générateurs et classes de conjugaison de  $O(n)$  et  $SO(n)$ . Simplicité du groupe orthogonal  $SO(3)$ . Simplicité, modulo leur centre, des groupes  $SO(n)$  pour  $n \geq 5$ .
- Corps des quaternions. Non simplicité du groupe  $SO(4)$ .
- Définition des angles de demi-droites et de droites comme orbites par l'action de  $O(n)$  en général et de  $SO(2)$  dans le cas du plan.
- Détermination des sous-groupes finis du groupe  $SO(3)$ . (Ce paragraphe inclut donc les groupes diédraux et les groupes du tétraèdre, du cube et de l'icosaèdre.)
- Construction d'un sous-groupe libre de rang 2 du groupe  $SO(3)$ . Paradoxe de Banach-Tarski.

### **Notions d'intérêt pour un enseignant dans le secondaire.**

- Les 5 solides de Platon.
- Les divers aspects de la notion d'angle.
- Historique dans la recherche des divers corps de nombres, réels, complexes, quaternioniques.
- L'axiome du choix et ses conséquences.

## **2.3 Géométrie**

*Ce module représente 6 ECTS au premier semestre du M2.*

### **1. Géométrie Plane**

- Birapport de quatre points alignés. Birapport d'un faisceau de droites. Faisceau harmonique.
- Puissance d'un point par rapport à un cercle. Axe radical de deux cercles, sa construction géométrique. Cercles orthogonaux.
- Polaire d'un point par rapport à deux droites. Transformation par polaire réciproque par rapport à un cercle.

- Inversion. Cercle d'inversion. Composition d'inversions. Inverses de cercles et de droites. Applications à certains problèmes de construction.
- Étude générale de la transformation  $z \in \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \frac{az+b}{cz+d} \in \hat{\mathbb{C}}$  où  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  et  $a, b, c, d$  sont des nombres complexes. Le groupe  $SL(2, \mathbb{C})$ .

## 2. Pavages et leurs symétries

- Pavages périodiques. Groupes d'automorphismes d'un pavage périodique, sa structure algébrique et son parallélogramme fondamental.
- Les 17 classes de pavages périodiques.

Suivant le parcours des étudiants, le cours se poursuivra par un ou plusieurs des thèmes suivants.

### – Géométrie dans l'espace

- Déplacements et symétries dans l'espace. Symétries par rapport à une droite, par rapport à un plan. Symétries glissées. Translations. Rotations. Vissages. Produits de ces transformations. Symétries de figures particulières.
- Groupes de transformations de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ . Le groupe linéaire, le groupe affine, le groupe des isométries linéaires et son sous-groupe des isométries positives, le groupe des isométries affines et son sous-groupe des isométries affines positives,....

### – Coniques

- Les différentes manières de définir ellipse, parabole, hyperbole. Excentricité. Leurs propriétés géométriques : tangente en un point, construction de tangentes. Théorèmes de Dandelin, de Poncelet, de Pascal, de Brianchon... Leurs équations dans des repères adaptés. Représentations paramétriques.

### – Polyèdres

- Étude des polyèdres  $s$ -réguliers (dont le groupe de symétrie agit transitivement sur les sommets),  $a$ -réguliers (action transitive sur les arêtes),  $f$ -réguliers (action transitive sur les faces). Étude des polytopes de dimension 4.

### – Géométrie affine réelle

- Convexité. Enveloppe convexe d'une partie. Points extrémaux d'un convexe.
- Applications affines. Composés. Expression analytique et nature.
- Coordonnées barycentriques d'un point du plan. Aire algébrique d'un triangle "orienté". Applications à la géométrie du triangle.

### Notions d'intérêt pour un enseignant dans le secondaire.

- L'approfondissement de plusieurs notions géométriques figurant au programme des Lycées et Collèges.
- La notion de pavage avec des liens historiques possibles, comme le pavage de l'Alhambra de Grenade.

## 2.4 Analyse 1

*Ce module représente 6 ECTS au premier semestre du M1.*

### Topologie et analyse fonctionnelle.

Espaces métriques, espaces vectoriels normés, espaces fonctionnels de fonctions continues, de fonctions intégrables.

Espaces complets. Complétion d'un espace métrique. Compacité, connexité et connexité par arcs d'un espace métrique.

Théorème d'Ascoli. Applications aux opérateurs à noyaux.

Théorème de Baire et ses conséquences : théorèmes de Banach-Steinhaus, de l'application ouverte, du graphe fermé, et d'isomorphisme de Banach.

Théorème de Hahn-Banach : forme analytique. Application à l'approximation.

### **Analyse complexe.**

Séries entières, fonction exponentielle. Formule de Cauchy. Calcul de résidus.

Fonctions analytiques, principe du prolongement analytique, zéros d'une fonction analytique.

Produits infinis de nombres complexes. Fonction Gamma.

### **Notions d'intérêt pour un enseignant dans le secondaire.**

- Passage de  $\mathbb{Q}$  à  $\mathbb{R}$  et de  $\mathbb{R}$  à  $\mathbb{C}$ .
- Liens entre la topologie et la géométrie (distances, normes).
- Axiomatisation de concepts géométriques concrets (compacts, connexes, convexes...).
- Apprendre à faire un dessin et à l'exploiter.

## **2.5 Préparation à l'écrit**

*Ce module représente 12 ECTS au premier semestre du M2.*

Cette unité est dédiée à la préparation des épreuves écrites d'admissibilité du CAPES externe : 1ère et 2ème compositions de Mathématiques. Elle s'articule autour de deux axes principaux :

- Une série d'écrits blancs où les étudiants rendent un problème dont le sujet est choisi parmi les écrits du CAPES des années précédentes. Ces copies sont corrigées et notées, la note servant à l'évaluation de l'unité. Une correction commentée est faite ensuite en séances de travaux dirigés ; elle s'accompagne de révisions et d'approfondissements sur les thèmes du programme auxquels se rapportent ces sujets.
- Des rappels de cours et des exercices et problèmes proposés en travaux dirigés, en guise de révisions et compléments sur divers thèmes du programme, qui peuvent varier d'une année à l'autre, d'une université à l'autre et qui s'adaptent aux besoins des publics.

Voici une liste, non exhaustive, des thèmes sur lesquels portent les révisions et compléments, tirés du programme actuel des épreuves de CAPES.

- *Analyse* — Séries de fonctions. — Séries entières. — Séries de Fourier. — Intégrales propres et impropres dépendant d'un paramètre. — Champs de vecteurs. — Intégrales curvilignes.
- *Algèbre* — Structures algébriques : groupes, anneaux, corps. — Polynômes et fractions rationnelles à une indéterminée. — Applications du calcul des déterminants. — Réduction des endomorphismes en dimension finie et des matrices. — Espaces euclidiens. — Espaces hermitiens. — Automorphismes orthogonaux : groupe orthogonal  $O(E)$ , groupe des rotations  $SO(E)$ .
- *Géométrie* — Coniques — Applications affines. Projections, affinité, symétries. — Groupe des transformations affines. Groupe des translations, Groupe des homothéties-translations. — Groupe

des isométries, groupe des déplacements. Isométries du plan, Isométries de l'espace. — Puissance d'un point par rapport à un cercle. — Inversion. — Utilisation des nombres complexes en géométrie. — Groupe diédral.

- *Probabilités* — Variables aléatoires, lois de probabilité. — Espérance, variance d'une variable aléatoire à valeurs réelles ou complexes. — Fonction caractéristique. — Famille d'événements, de tribus, ou de variables indépendantes. — Convolution de lois. — Convergence de suites de variables aléatoires. — Loi faible des grands nombres. — Théorème de la limite centrale.

## 2.6 Préparation à la première épreuve orale

*Ce module représente 8 ECTS au deuxième semestre du M2.*

**Pour cette préparation nous nous appuyons sur la description officielle de l'épreuve.** Le candidat élabore un plan d'étude détaillé à partir d'un thème, parmi deux qu'il tire au sort. Dans un premier temps (15 min maximum), il expose le plan, puis dans un second temps (15 min) il développe une partie du plan d'étude à la demande du jury. L'épreuve se termine par un entretien avec le jury (30 min) portant sur ce développement, puis sur d'autres aspects relevant du sujet choisi par le candidat

Le programme de cette épreuve est constitué des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des sections de techniciens supérieurs.

Organisation d'une séance : Pendant chaque demi-séance, un étudiant exposera d'abord dans les mêmes conditions que ci-dessus. La suite de la séance sera consacrée à un entretien avec l'enseignant et le groupe concernant les faiblesses et les points forts du plan, du développement à d'autres aspects relevant du sujet choisi et à d'éventuels compléments proposés par l'enseignant.

Evaluation : L'objectif est d'évaluer la qualité du travail fourni par l'étudiant en cours de module mais aussi les compétences qu'il y a acquises.

Formule employée : – Une note pour les exposés, prenant aussi en compte la version écrite ; cette note compte pour 50%, – une note pour une épreuve orale blanche en fin de module, cette note compte pour 50%.

**Thèmes.** Ces thèmes sont pris au sens large.

### **Algèbre.**

Ensemble de nombres — La proportionnalité — Équations et inéquations du premier et du second degré à une inconnue (ou pouvant s'y ramener) — Systèmes linéaires — Systèmes d'inéquations, programmation linéaire — Calcul matriciel — Théorie des graphes.

### **Arithmétique. Géométrie.**

Géométrie plane — Géométrie dans l'espace — affine — euclidienne — analytique — Calcul vectoriel.

### **Nombres complexes. Dénombrement.**

### **Probabilités et statistique.**

Equiprobabilité — Probabilités conditionnelles — Variables aléatoires-lois discrètes continues — Calcul matriciel et probabilité — Statistique descriptive — Statistique inférentielle — Modélisation et simulation d'expériences aléatoires — Plan d'expériences — Fiabilité.

### **Analyse.**

Nombres — Calculs — Suites — Fonctions d'une variable réelle — Fonctions de deux ou trois variables réelles — Calcul différentiel — Calcul intégral — Équations différentielles — Séries numériques et séries de Fourier — Transformée de Laplace — Transformée en  $z$ .

## Chapitre 3

# Modules pluridisciplinaires

### 3.1 Épistémologie et Histoire de la discipline

*Ce module représente 6 ECTS au deuxième semestre du M1.*

1. Le système hypothético-déductif d'Euclide : “Les éléments” d'Euclide dans le contexte des mathématiques grecques. Le Livre 1 des “Éléments” où Euclide introduit les définitions, les notions communes et les demandes de la géométrie. L'influence de l'œuvre d'Euclide sur les mathématiques futures.
2. Le système hypothético-déductif des “Grundlagen der Geometrie” de Hilbert. Comparaison entre l'œuvre d'Euclide et l'œuvre de Hilbert. Quelques remarques sur les conséquences de l'œuvre de Hilbert, notamment sur le formalisme et le théorème de Gödel.
3. Les fondements de la géométrie pendant le Dix-Neuvième siècle : Les *vrais* axiomes de l'espace et les variétés riemanniennes (Riemann, Beltrami, Helmholtz). Les axiomes de la géométrie projective (Klein et l'école italienne). Le programme d'Erlangen de Klein.
4. La construction des nombres réels : les liens entre nombres réels et concept de limite pendant le Dix-Neuvième siècle. La rigueur en analyse et la problématique des nombres réels. Les axiomes de Cantor. Les axiomes de Dedekind. De l'analyse de Cauchy à l'école de Weierstrass.

Suivant le parcours des étudiants, le cours pourra se poursuivre par la mise en relation des points 1 à 4 avec l'histoire de contenus enseignés dans le secondaire par l'intermédiaire de l'histoire des pratiques mathématiques. Le programme ci-dessus est seulement un exemple de thèmes historiques bien corrélés avec la formation d'un enseignant et il peut être modifié dans chaque université participante, sous réserve de l'accord du responsable local de la spécialité.

#### **Notions d'intérêt pour un enseignant dans le secondaire.**

- Développer la culture scientifique, situer sa discipline d'origine dans un contexte plus large : approfondir par des dimensions historique, épistémologique et, plus généralement, culturelle, les représentations de ce que sont les sciences, de leurs méthodes et de leurs enjeux sociaux à diverses époques.

- Introduction aux méthodes et problèmes de l'histoire des mathématiques permettant de porter un regard réflexif sur l'activité scientifique.
- Identifier dans leur contexte épistémologique et historique les concepts, notions et méthodes rencontrés dans l'enseignement à un niveau donné.
- Initiation à des pratiques pédagogiques s'appuyant sur l'insertion d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques.

## 3.2 Langues

*Cet enseignement comporte un module obligatoire au M1 de 2 ECTS pour 24 heures de présence.*

*Au deuxième semestre du M2,*

- *pour les étudiants admissibles, 2 ECTS pour 24 heures de présence,*
- *pour les étudiants non-admissibles, en réorientation : 6 ECTS en Anglais pour 54 heures de présence et 4 ECTS dans une autre langue pour 36 heures de présence,*
- *pour les étudiants non-admissibles, gardant le projet professionnel, 2 ECTS pour 24 heures de présence.*

Nous imposons aux étudiants un niveau minimum en anglais en sortie de la spécialité "Métiers de l'Enseignement en Mathématiques" (CLES). Chaque année, un test de niveau est organisé par les Centres de Ressources en Langues, responsables de l'enseignement des Langues dans nos universités respectives. A l'issue de ce test, l'étudiant est orienté suivant son niveau.

L'anglais sera travaillé sous forme de cours classiques et d'auto-formation tutorée dans les Centres de Ressources en Langues. Le but est d'obtenir la certification requise au niveau d'un Master.

La mutualisation des langues entre plusieurs Masters permettra d'ouvrir des unités d'enseignement pour d'autres langues que l'anglais (espagnol, italien, russe, etc.) mais également d'offrir une formation spécifique de Français aux étudiants étrangers.

## **Troisième partie**

# **Options**

## Chapitre 4

# Modules professionnalisants optionnels

### 4.1 Les Mathématiques, discipline scolaire et Culture professionnelle

*Ce module représente 4 ECTS au premier semestre du M1.*

**Les Mathématiques, discipline scolaire : Connaissance des programmes du secondaire et de leur évolution.**

Cet enseignement sera construit à partir d'une

- Etude détaillée des programmes et des documents d'accompagnement actuels
- Etude de la continuité des apprentissages dans un domaine donné (par exemple, de l'arithmétique à l'algèbre)
- Etude des différentes organisations possibles des savoirs enseignés à travers des comparaisons des programmes et de manuels
- Elaboration de progressions

**Culture professionnelle** Les objectifs sont :

- La connaissance du système éducatif et de ses acteurs
- La déontologie, l'éthique professionnelle
- Les théories de l'apprentissage et médiations langagières
- Les courants pédagogiques.

*Enseigner et Apprendre à l'école (1)*

- Théories de l'apprentissage et médiations langagières :
  - Evolutions, oppositions et spécificités
  - Béhaviorisme, cognitivisme, constructivisme ; socio constructivisme, médiation et étayage ; représentations sociales.
  - Les conditions de l'apprentissage.
- Les courants pédagogiques :
  - Les différents courants pédagogiques : les grandes figures, le contexte politique et social.
  - Leur influence aujourd'hui au collège et au lycée

*Valeurs et finalités de l'école*

- Construction du système éducatif français :

- Approche socio historique.
- Etat des lieux.
- Les principes du service public d'éducation :
  - Les valeurs et les finalités dans la classe et l'établissement.
  - Lois, règles et règlements — Droits et devoirs dans la communauté éducative — Code de l'éducation — Règlements intérieurs des EPLE : tensions et dilemmes.

## 4.2 Histoire de l'Enseignement des Mathématiques

*Ce module représente 3 ECTS au deuxième semestre du M1.*

### Contenus.

- Acquérir des connaissances sur l'histoire de l'enseignement des mathématiques. Connaître l'histoire du système scolaire et la place qu'y joue l'enseignement des sciences. Débats entre culture scientifique, culture littéraire, séparations disciplinaires depuis le XIXe siècle, évolutions institutionnelles (laïcité, évolutions entre enseignements général, professionnel et technique etc.).
- Enrichir la réflexion sur le système éducatif contemporain. Notamment, éclairage du retour de thèmes transversaux (argumentation, démarche expérimentale, citoyenneté, autonomie etc.) et culturels (culture scientifique, "humaniste" etc.) au travers de l'histoire des séparations disciplinaires.
- Pratiques d'enseignement des sciences à travers l'histoire des sciences et de l'enseignement scientifique. Enjeux et modalités de l'insertion de perspectives historiques, épistémologiques et interdisciplinaires dans l'enseignement des sciences. Présentation de pratiques visant à articuler enseignement des sciences et perspectives culturelles plus larges dans les différents temps de l'organisation didactique. Développements réflexifs sur ces pratiques. Étude de cas présentant un intérêt à la fois historique et didactique (textes anciens, ressources muséographiques etc.).

## 4.3 Didactique des Mathématiques liée aux contenus enseignés

*Ce module représente 6 ECTS au deuxième semestre du M1.*

Cet enseignement est construit en deux parties :

1- *En continuité avec les enseignements du module de "Les Mathématiques, discipline scolaire et intervention éducative" du semestre 1 en traitant des domaines non abordés, par exemple la géométrie et l'analyse.*

- Étude détaillée des programmes et des documents d'accompagnement actuels.
- Étude de la continuité des apprentissages dans les domaines abordés.
- Étude de différentes organisations possibles des savoirs enseignés à travers des comparaisons de programmes et de manuels.
- Élaboration de progressions.

2- *Initiation aux méthodes d'analyse didactique (a priori et a posteriori) de situations d'apprentissage.* On pourra ici s'appuyer sur les séances mises en place dans le module "Stage et culture professionnelle" et sur des analyses de vidéos.

- Étude de stratégies d’enseignement.
- Étude de conceptions des élèves.
- Étude de diverses formes d’évaluation.
- Outils d’élaboration et d’analyse de séances.

## **4.4 Séminaires de Recherche**

*Ce module représente 3 ECTS au deuxième semestre du M1.*

Les membres des Laboratoires de Mathématiques donneront des Séminaires présentant des sujets de recherche sur les thématiques suivantes : — Algèbre non commutative — Analyse fonctionnelle — Analyse harmonique — Didactique — Histoire des Mathématiques — Théorie de Galois — Topologie et Géométrie — Arithmétique — Géométrie Algébrique — Analyse numérique — Équations aux dérivées partielles — Probabilités — Statistique — Théorie des Nombres.

Ces Séminaires seront ouverts aux étudiants des Spécialités “Mathématiques Recherche” dans la cadre du TER. Les étudiants choisiront les Séminaires à suivre et participeront activement à ces exposés en rédigeant des notes de synthèse sur les thèmes développés. Les sujets pourront différer d’une année sur l’autre.

# Chapitre 5

## Modules disciplinaires optionnels

L'une seulement des deux unités d'Arithmétique et Théorie des Nombres sera proposée chaque année.

### 5.1 Arithmétique et Théorie des Nombres 1

*Cette unité sera offerte au deuxième semestre du M1, pour 6 ECTS avec 60 heures de présence.*

- Extensions algébriques, transcendentes (sur  $\mathbb{Q}$ ).
- Théorème de Liouville pour la construction de nombres transcendants.
- Corps de nombres. Construction à la règle et au compas.
- Corps quadratiques. Anneaux des entiers d'un corps quadratique. Cas où l'anneau est euclidien, plus généralement principal. Étude de  $\mathbb{Z}[i]$ ,  $\mathbb{Z}[j]$ .
- Théorème des unités de Dirichlet dans le cas réel quadratique. Recherche de l'unité fondamentale à l'aide des fractions continues.
- Réseau dans le plan complexe. Domaine fondamental. Cas d'un corps quadratique imaginaire.
- Courbe elliptique.

#### **Notions d'intérêt pour un enseignant dans le secondaire.**

- Résolutions d'équations diophantiennes.
- Approximation d'un nombre réel par des nombres rationnels.
- Analogie entre l'arithmétique de  $\mathbb{Z}$  et celle de  $\mathbb{Z}[i]$

### 5.2 Arithmétique et Théorie des Nombres 2

*Cette unité sera offerte au deuxième semestre du M1, pour 6 ECTS avec 60 heures de présence.*

1. Rappels et exemples : Anneaux .Caractéristique d'un anneau. Morphismes d'anneaux. Idéal. Anneaux quotients. Corps. Corps finis. Critère d'Eisenstein d'irréductibilité d'un polynôme.
2. Extensions de corps commutatifs. Degré d'une extension. Extension engendrée par des éléments. Composée d'extensions. Extensions linéairement disjointes.

3. Extensions algébriques. Définition d'un élément algébrique, transcendant. Polynôme minimal d'un élément algébrique (exemples à l'aide du critère d'Eisenstein). Fermeture et clôture algébrique d'un corps  $K$ .  $K$ -morphisms d'extensions de  $K$ .
4. Extensions normales. Corps de décomposition d'un polynôme. Clôture normale d'une extension algébrique.
5. Extensions séparables. Polynômes séparables. Corps parfaits. Dénombrement des  $K$ -morphisms d'une extension séparable de  $K$  de degré fini. Eléments primitifs. Trace, norme, discriminant.
6. Extensions galoisiennes. Groupe de Galois d'un polynôme. Théorème fondamental de la théorie de Galois. Composée d'extensions galoisiennes.
7. Anneau des entiers  $O_K$  d'une extension quadratique  $K$  de  $\mathbb{Q}$ . Détermination explicite de  $O_K$ . Exemples de décomposition des idéaux premiers de  $\mathbb{Z}$  en un produit d'idéaux premiers de  $O_K$  (une introduction à la ramification).

Les thèmes suivants seront traités sous forme d'exposés faits par les étudiants : Construction à la règle et au compas. Méthodes de codage. Extensions cyclotomiques sur  $\mathbb{Q}$ . Extensions cycliques de degré  $n$  d'un corps contenant des racines nièmes de l'unité. Résolution par radicaux d'une équation polynomiale.

**Notion d'intérêt pour un enseignant dans le secondaire.**

- Construction à la règle et au compas.
- Méthodes de codage. (Codes cycliques, de Hamming)
- Résolution par radicaux d'une équation polynomiale.

## 5.3 Analyse 2

*Cette unité sera offerte au premier semestre du M1, pour 4 ECTS avec 40 heures de présence.*

**Analyse hilbertienne.**

Espaces préhilbertiens et espaces de Hilbert, produit scalaire, théorème de la projection.

Suites orthonormales et bases hilbertiennes. Séries de Fourier. Théorème d'approximation de Weierstrass-Fejér. Procédé de Gram-Schmidt.

Inégalité de Bessel et identité de Parseval. Polynômes orthogonaux.

Décomposition spectrale d'un endomorphisme normal compact. Opérateurs intégraux, formules de trace.

Théorème de Hahn-Banach : forme géométrique.

**Equations différentielles.**

Résolution des équations différentielles classiques. Variation de la constante. Équations à variables séparées.

Théorème de Cauchy-Lipschitz, solutions maximales.

Etude qualitative des courbes intégrales.

Cas des systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 et des équations scalaires d'ordre quelconque, exponentielles d'endomorphismes.

**Notions d'intérêt pour un enseignant dans le secondaire.**

- Rôle de l'orthogonalité en analyse.

- Approximations.
- Équations différentielles en liaison avec la physique ; oscillateurs, équations logistiques.
- Modélisation.

## 5.4 Analyse numérique et Programmation

*Cette unité sera offerte au deuxième semestre du M1, pour 6 ECTS avec 60 heures de présence.*

I- Approximations numériques : des nombres réels, des sommes des séries convergentes. Fractions continues : définitions et propriétés, transformation d'une série en fraction continue, résultats de convergence, application à l'approximation de certaines fonctions mathématiques.

II- Approximation des fonctions : Meilleure approximation au sens d'une norme. Approximation au sens des moindres carrés continus et discrets : les exemples de l'approximation par des polynômes et par des polynômes trigonométriques. Approximation uniforme : théorème d'alternance de Tchebychev, l'algorithme de Remez.

III- Vitesse de convergence des suites : Comparaison des suites convergentes : ordre d'une suite, comparaison de deux suites. Le procédé d'extrapolation de Richardson. Le procédé  $\Delta^2$  d'Aitken.

IV- Formules de quadrature numérique : Rappels sur les méthodes de Newton- Côtes composites. La méthode de Romberg-Richardson. Polynômes orthogonaux Application aux formules de Gauss-Legendre, Gauss-Laguerre, Gauss-Tchebychev, Gauss-Hermite..

V- Approximation des solutions d'équations différentielles : Méthodes à pas Séparés. Euler, Runge-Kutta.

VI- Optimisation en contraintes linéaires : méthode du simplexe.

Ce cours doit être accompagné de TD-TP sur ordinateur illustrant chacun des chapitres en langage Scilab.

**Notions d'intérêt pour un enseignant dans le secondaire.** - Approximations numériques - Fractions continues - Rapidité de convergence des suites - Polynômes de Tchebychev - Droite de régression linéaire - Méthode d'Euler - Méthode du simplexe